# Fundamentos de Robótica

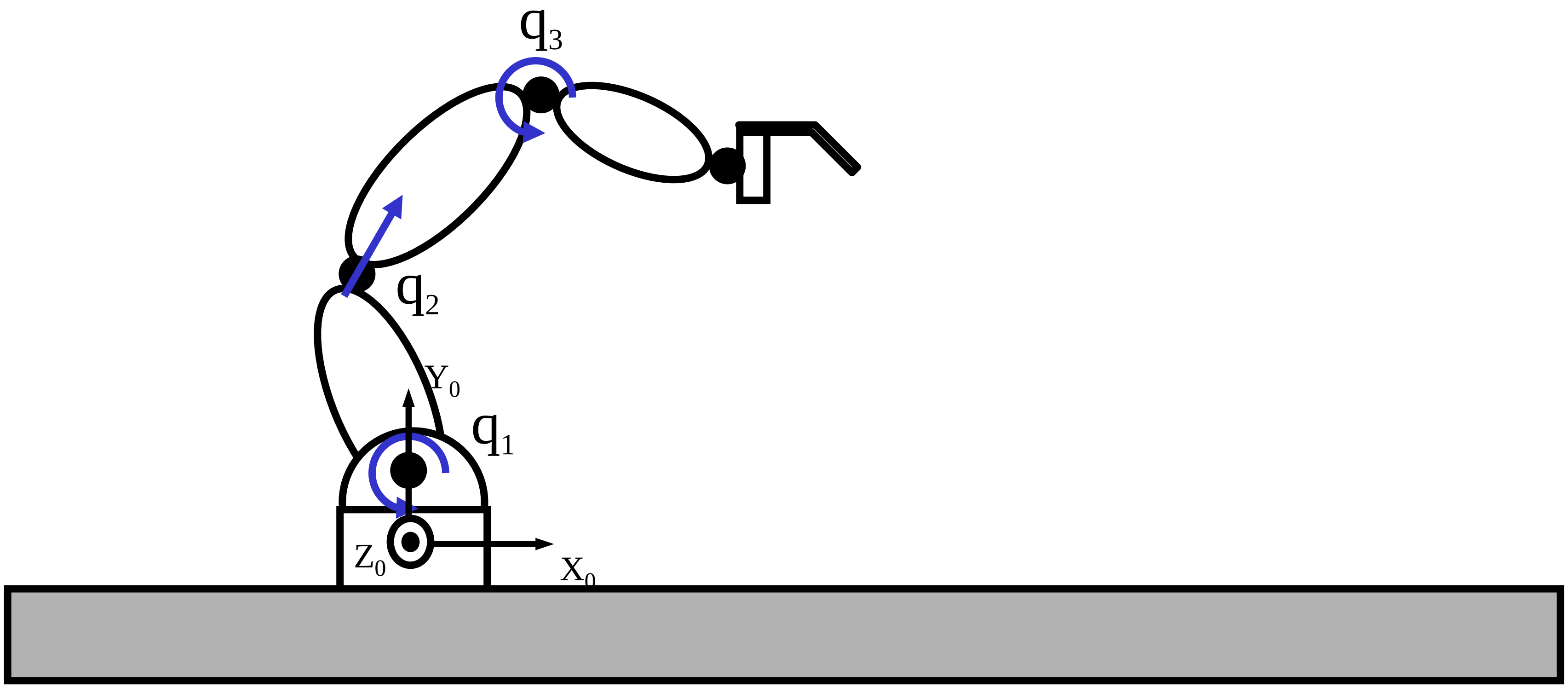
Juan Carlos Grieco, Universidad Simón Bolívar

Gerardo Fernández, Universidad Simón Bolívar

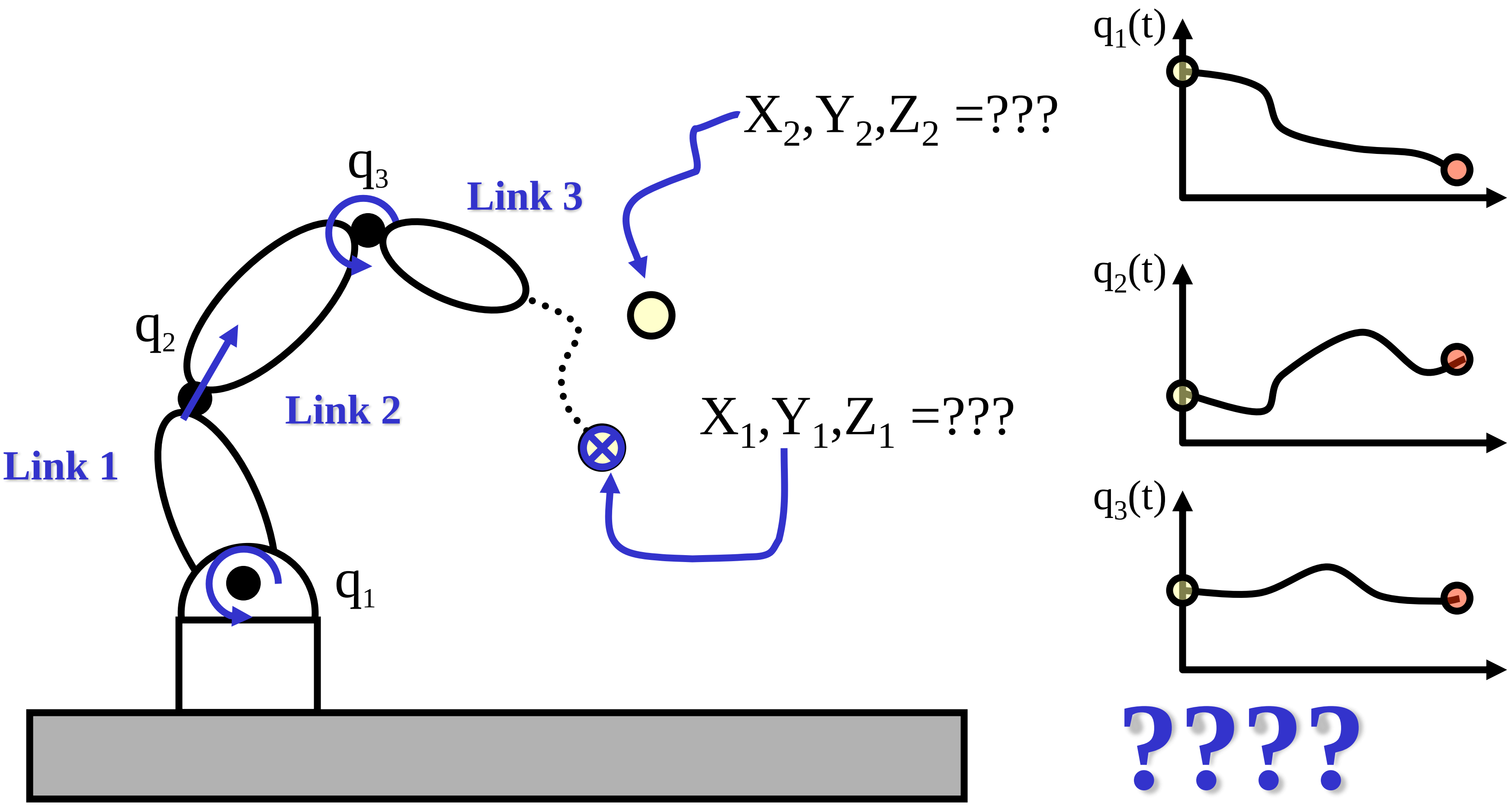
Wilfredis Medina, Universidad Simón Bolívar

# Temas que nos competen...

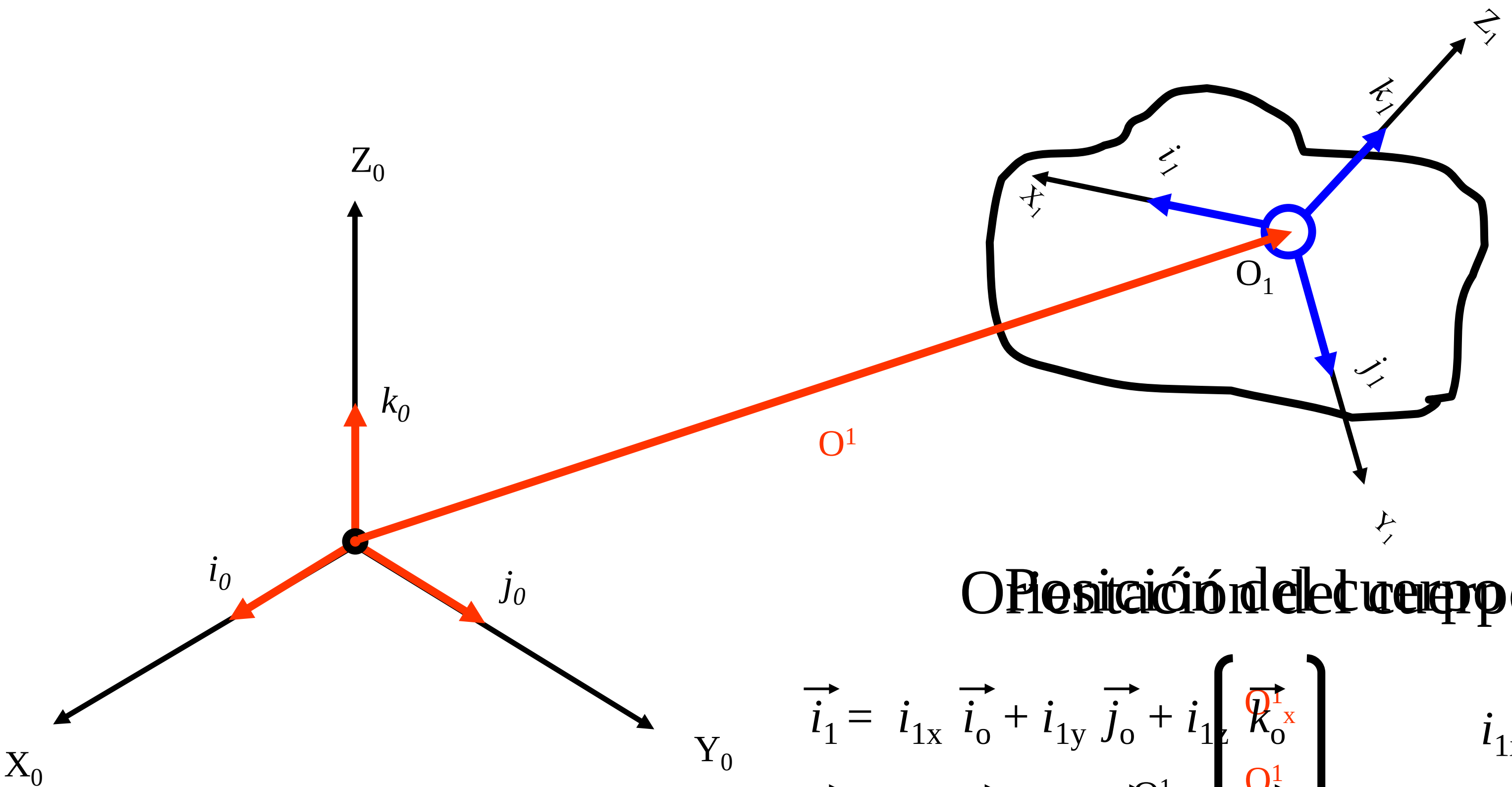
- Cinemática Directa…



# Cinemática Directa…



# Posición y Orientación de un Cuerpo en el Espacio...




## Orientación del cuerpo

Posición del cuerpo

$$\vec{i}_1 = i_{1x}\,\vec{i}_o + i_{1y}\,\vec{j}_o + i_{1z}\,\vec{k}_o$$

$$\vec{j}_1 = j_{1x}\,\vec{i}_o + j_{1y}\,\vec{j}_o + j_{1z}\,\vec{k}_o$$

$$\vec{k}_1 = k_{1x}\,\vec{i}_o + k_{1y}\,\vec{j}_o + k_{1z}\,\vec{k}_o$$

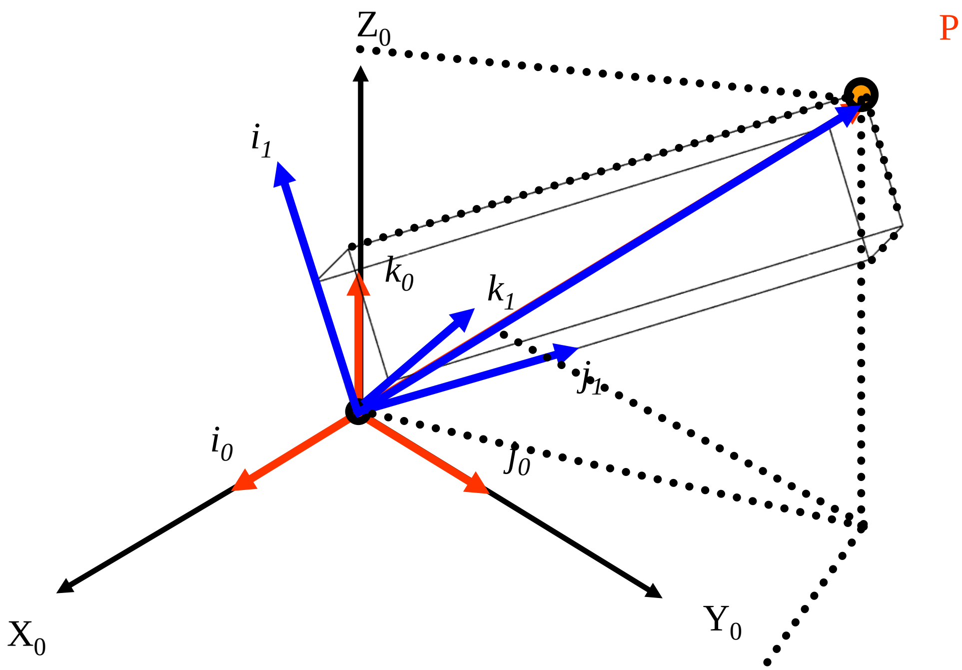
$$O^1 = \begin{bmatrix} O^1{}_x \\ O^1{}_y \\ O^1{}_z \end{bmatrix}$$

$$i_{1x} = \vec{i}_1 \bullet \vec{i}_o$$

$$i_{1y} = \vec{i}_1 \bullet \vec{j}_o$$

$$i_{1z} = \vec{i}_1 \bullet \vec{k}_o$$

# Consideremos solo Orientación...




Visto desde el SC0

$$\vec{P}_0 = P_{0x}\,\vec{i}_o + P_{0y}\,\vec{j}_o + P_{0z}\,\vec{k}_0$$

Pero visto desde el SC1

$$\vec{P}_1 = P_{1x}\,\vec{i}_1 + P_{1y}\,\vec{j}_1 + P_{1z}\,\vec{k}_1$$

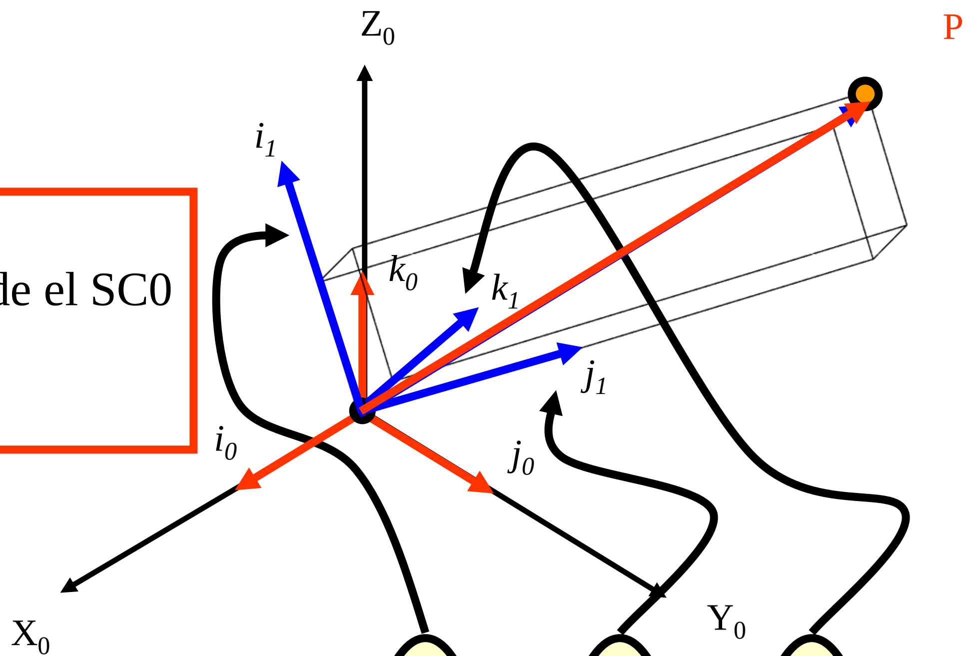
$$P_{ox} = \vec{P}_0 \bullet \vec{i}_o$$

$$P_{ox} = \vec{P}_1 \bullet \vec{i}_o \quad = P_{1x}\,\vec{i}_1 \bullet \vec{i}_o + P_{1y}\,\vec{j}_1 \bullet \vec{i}_o + P_{1z}\,\vec{k}_1 \bullet \vec{i}_o$$

$$P_{oy} = \vec{P}_1 \bullet \vec{j}_o \quad = P_{1x}\,\vec{i}_1 \bullet \vec{j}_o + P_{1y}\,\vec{j}_1 \bullet \vec{j}_o + P_{1z}\,\vec{k}_1 \bullet \vec{j}_o$$

$$P_{oz} = \vec{P}_1 \bullet \vec{k}_o \quad = P_{1x}\,\vec{i}_1 \bullet \vec{k}_o + P_{1y}\,\vec{j}_1 \bullet \vec{k}_o + P_{1z}\,\vec{k}_1 \bullet \vec{k}_o$$

# Consideremos solo Orientación...




Visto desde el SC0

Visto desde el SC0

$$\vec{P}_0 = P_{0x}\,\vec{i}_o + P_{0y}\,\vec{j}_o + P_{0z}\,\vec{k}_0$$

Pero visto desde el SC1

$$\vec{P}_1 = P_{1x}\,\vec{i}_1 + P_{1y}\,\vec{j}_1 + P_{1z}\,\vec{k}_1$$

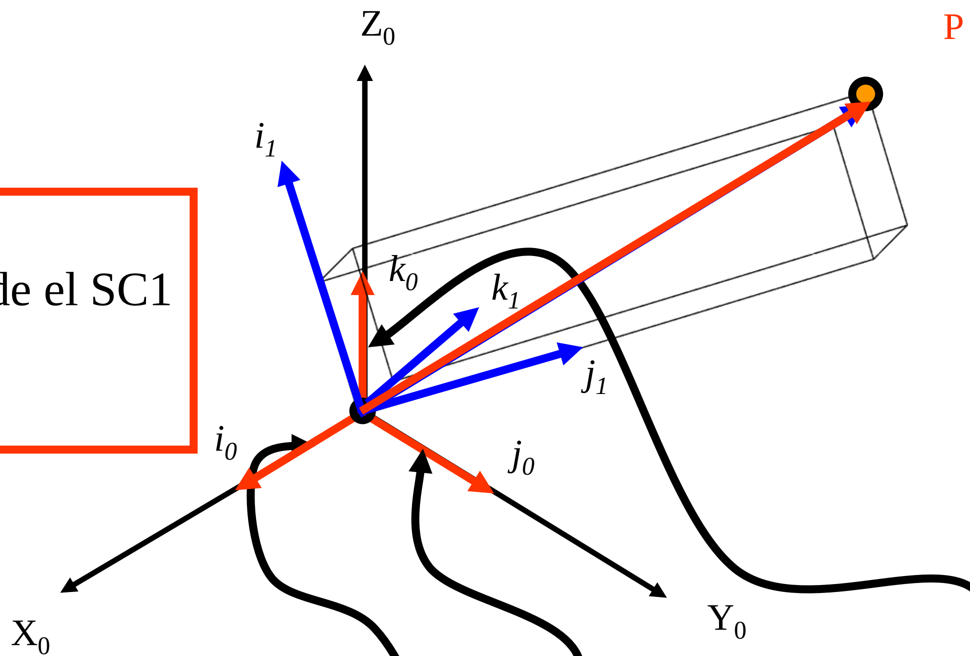
***Matricialmente tenemos...***

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \bullet \vec{i}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{i}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{i}_o \\ \vec{i}_1 \bullet \vec{j}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{j}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{j}_o \\ \vec{i}_1 \bullet \vec{k}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{k}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{k}_o \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_o = \boldsymbol{R}_0^{1} * \vec{P}_1$$

# Consideremos solo Orientación...

Visto desde el SC1




Visto desde el SC0

$$\vec{P}_0 = P_{0x}\,\vec{i}_o + P_{0y}\,\vec{j}_o + P_{0z}\,\vec{k}_0$$

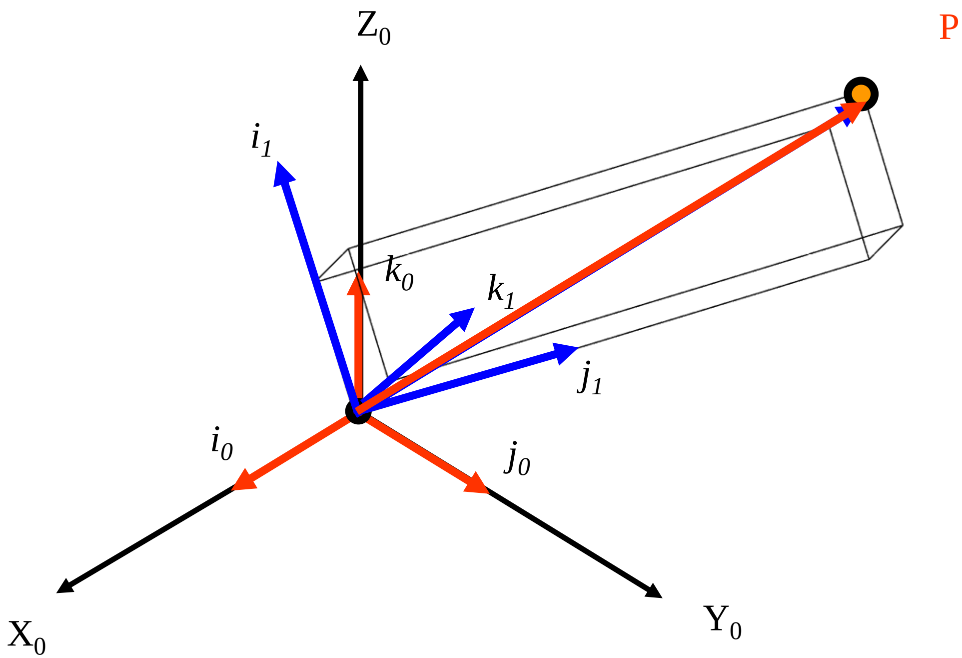
Pero visto desde el SC1

$$\vec{P}_1 = P_{1x}\,\vec{i}_1 + P_{1y}\,\vec{j}_1 + P_{1z}\,\vec{k}_1$$

***Matricialmente tenemos...***

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \bullet \vec{i}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{i}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{i}_o \\ \vec{i}_1 \bullet \vec{j}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{j}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{j}_o \\ \vec{i}_1 \bullet \vec{k}_o & \vec{j}_1 \bullet \vec{k}_o & \vec{k}_1 \bullet \vec{k}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

# Consideremos solo Orientación...




***Así, la Matriz viene a ser...***

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_0^{\,T} \\ \vec{j}_0^{\,T} \\ \vec{k}_0^{\,T} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

# Consideremos solo Orientación...

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

***Esta Matriz tiene algunas características...***

1. ***Los vectores columna de la matriz son ortogonales...***
2. ***Los vectores columna tienen norma unitaria***
3. ***La matriz $R_0^1$ es ortogonal... ($R^T * R = I$) y det($R_0^1$)=1***

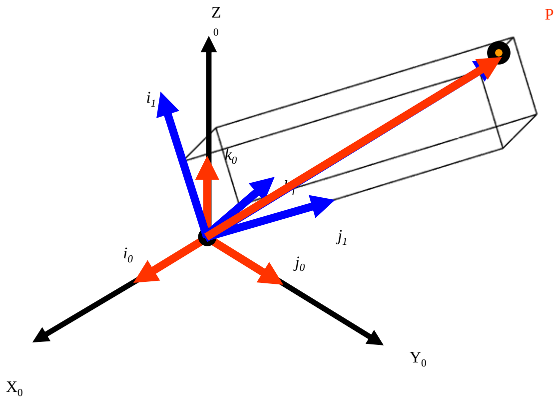
$$\Rightarrow (\boldsymbol{R}_0^{\,1})^{-1} = (\boldsymbol{R}_0^{\,1})^T \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_1^{\,0} = (\boldsymbol{R}_0^{\,1})^T$$

# Consideremos solo Orientación...

$\boldsymbol{R}_0^{\,1}$ ⇨ ***Matriz de Rotación***

***Esta Matriz tiene varias interpretaciones...***

1. ***Representa una matriz de transformación de coordenadas entre dos S.C.***



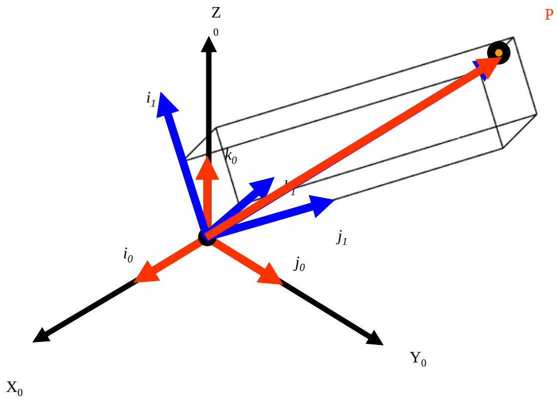

$$\overrightarrow{P_o} = \boldsymbol{R}_0^{\,1} * \overrightarrow{P_1}$$

# Consideremos solo Orientación...

$\boldsymbol{R}_0^{\,1}$ **_Matriz de Rotación_**

***Esta Matriz tiene varias interpretaciones...***

***2.- Representa la orientación de un sistema de coordenadas...***



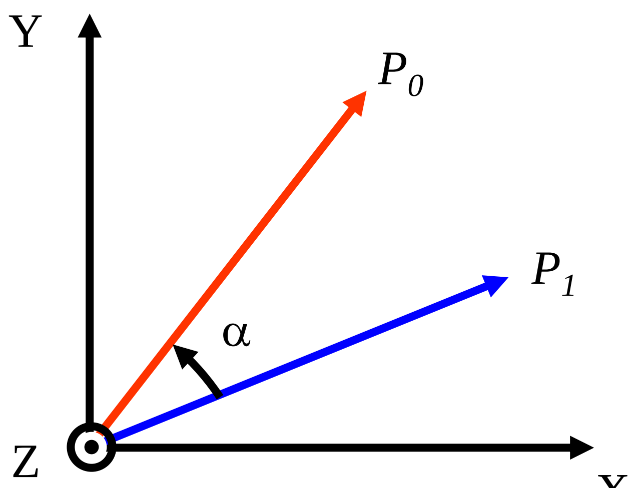

$$\begin{bmatrix} P_{ox} \\ P_{oy} \\ P_{oz} \end{bmatrix} = \left( \begin{matrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \end{matrix} \right) \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

# Consideremos solo Orientación...

$\boldsymbol{R}_0^{\,1}$ $\Longrightarrow$ ***Matriz de Rotación***

***Esta Matriz tiene varias interpretaciones...***

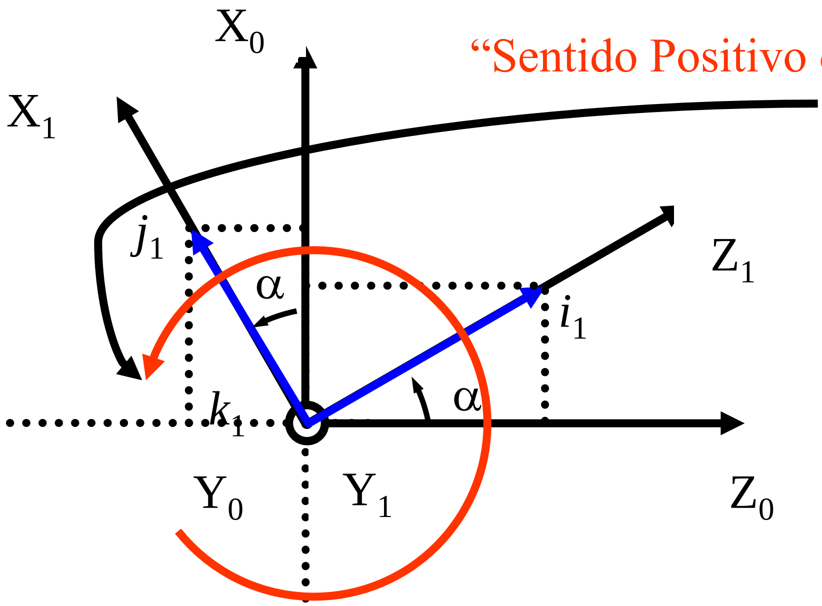
***3.- Representa un operador matricial de rotación vectorial...***




$$\begin{bmatrix}P_{ox}\\ P_{oy}\\ P_{oz}\end{bmatrix} = \left(\quad \boldsymbol{R}_0^{\,1} \quad\right)\begin{bmatrix}P_{1x}\\ P_{1y}\\ P_{1z}\end{bmatrix}$$

***"...La ortogonalidad de la matriz mantiene la norma del vector..."***

# Rotaciones elementales...

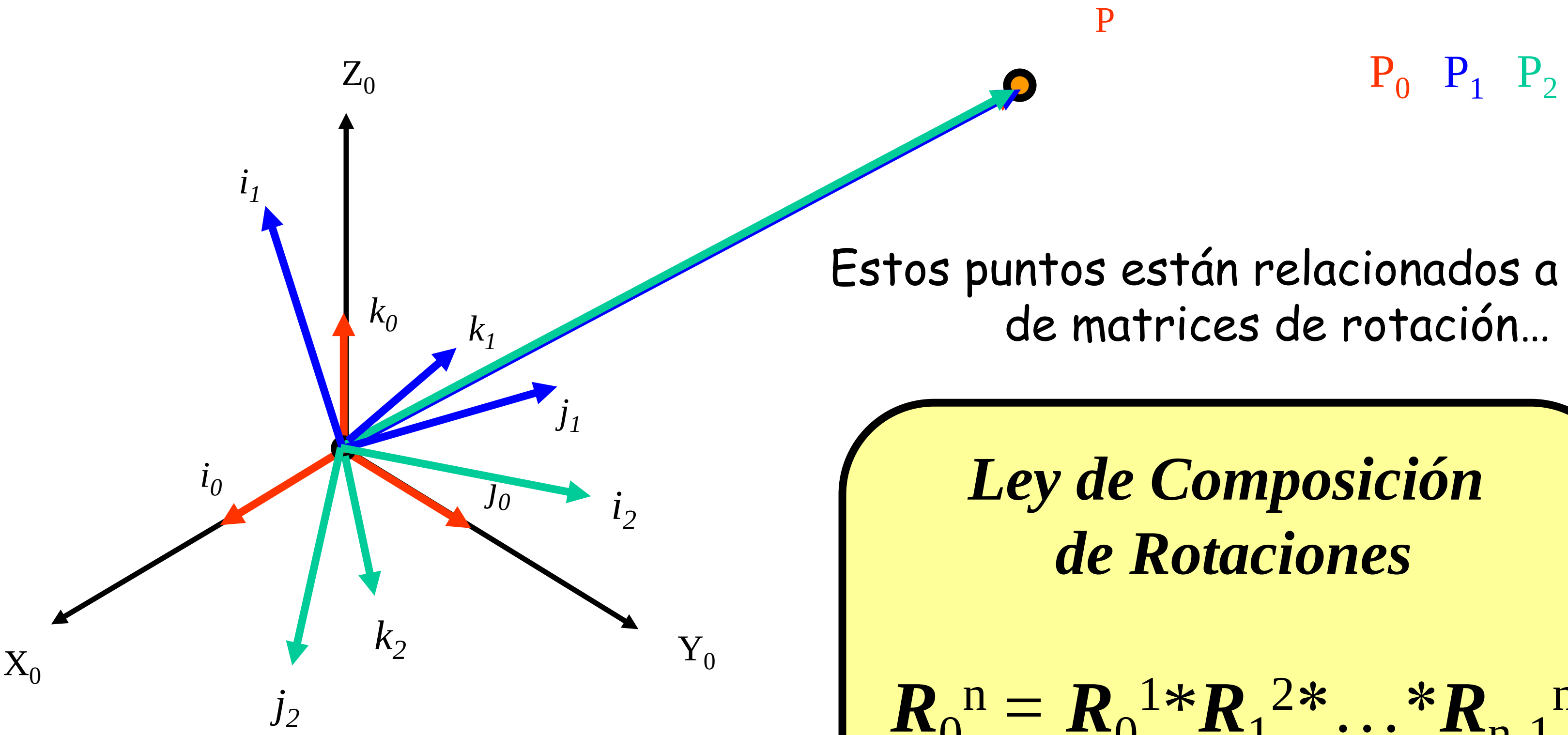



$$\boldsymbol{R}_{Z,\,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}\,(\alpha) & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos\,(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{X,\,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}\,(\alpha) \\ 0 & \mathrm{sen}(\alpha) & \cos\,(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_{Y,\,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \mathrm{sen}\,(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 & \cos\,(\alpha) \end{bmatrix}$$

# Composición de Matrices de Rotación...



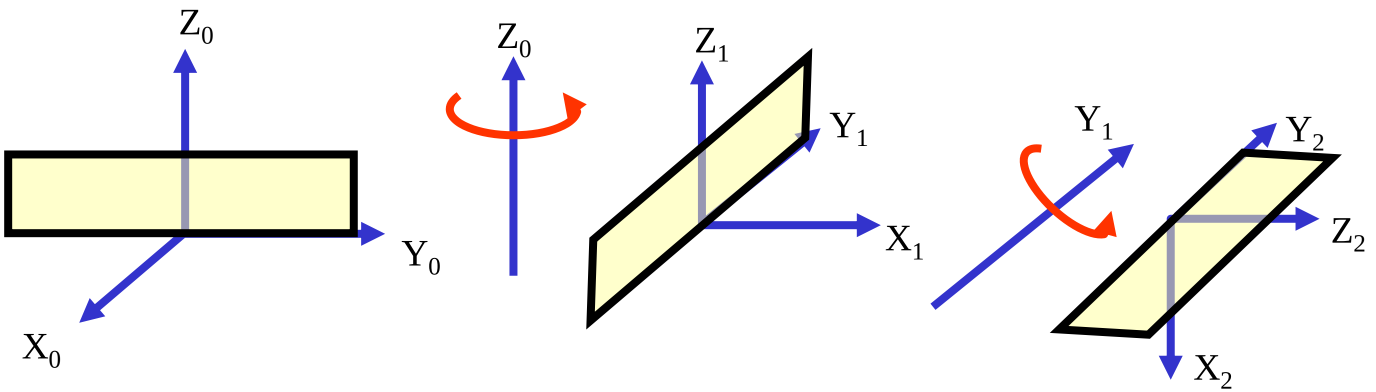

Estos puntos están relacionados a través de matrices de rotación...

***Ley de Composición de Rotaciones***

$$\boldsymbol{R}_0^{\,n} = \boldsymbol{R}_0^{\,1} * \boldsymbol{R}_1^{\,2} * \ldots * \boldsymbol{R}_{n-1}^{\,n}$$

# Composición de Matrices de Rotación...

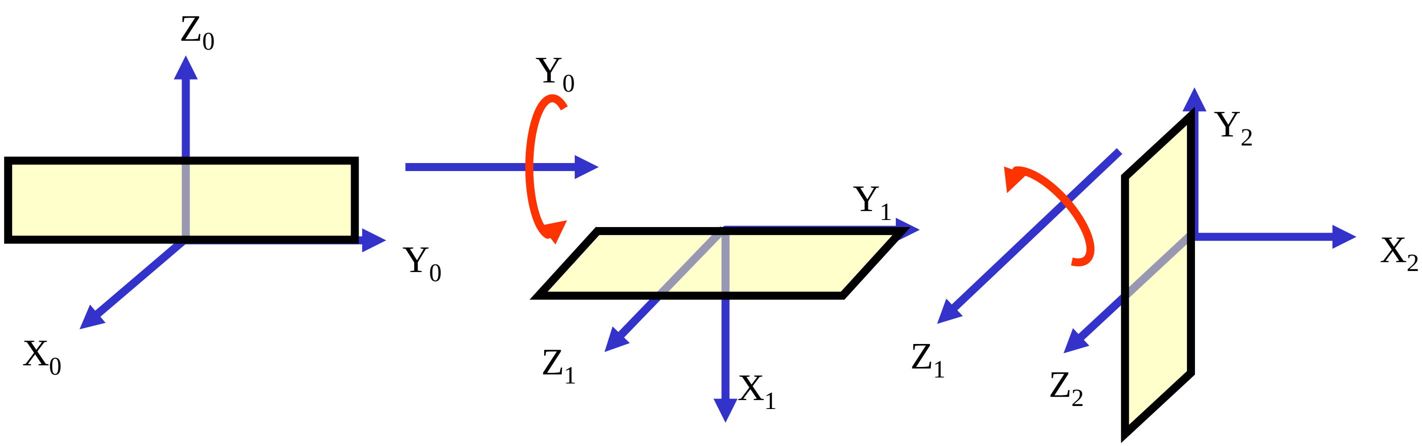
***Ejemplo… Rotaciones elementales***




$$\boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R_0^1}\,\boldsymbol{R_1^2}$$
$$\boldsymbol{R_0^1} = \boldsymbol{R}_{Z,90}$$
$$\boldsymbol{R_1^2} = \boldsymbol{R}_{Y,90}$$

$$\boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R}_{Z,90} * \boldsymbol{R}_{Y,90}$$

≠



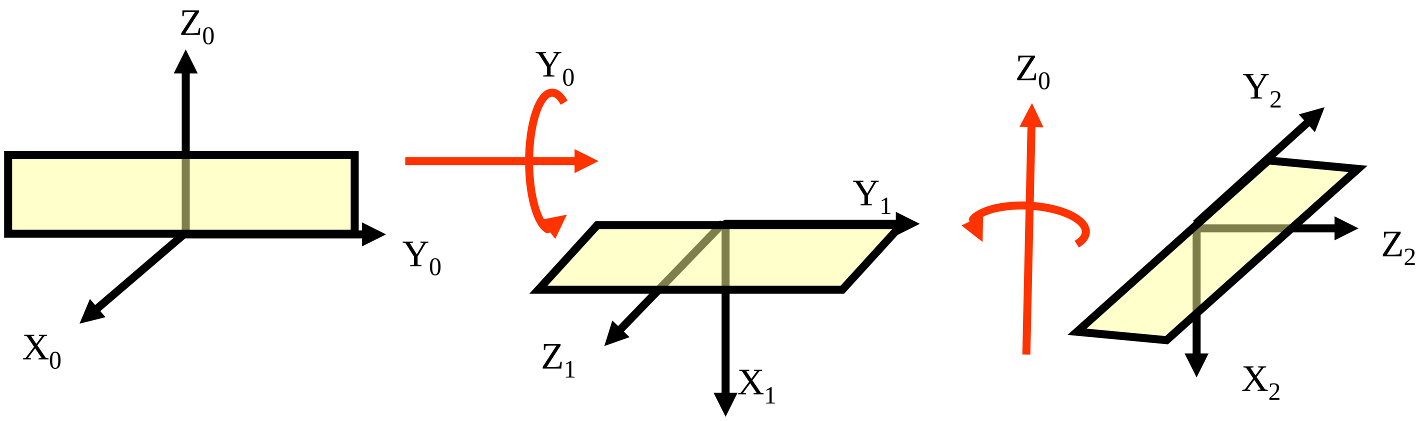

$$\boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R}_{Y,90} * \boldsymbol{R}_{Z,90}$$

$$\boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R_0^1}\,\boldsymbol{R_1^2}$$
$$\boldsymbol{R_0^1} = \boldsymbol{R}_{Y,90}$$
$$\boldsymbol{R_1^2} = \boldsymbol{R}_{Z,90}$$

# Composición de Matrices de Rotación...

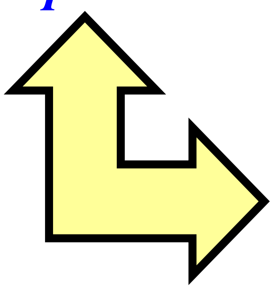
***Reinterpretemos la segunda operación …***

***Como operaciones sobre el SC base …***




$$\boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{Y},90} * \boldsymbol{R}_{\mathrm{Z},90}$$

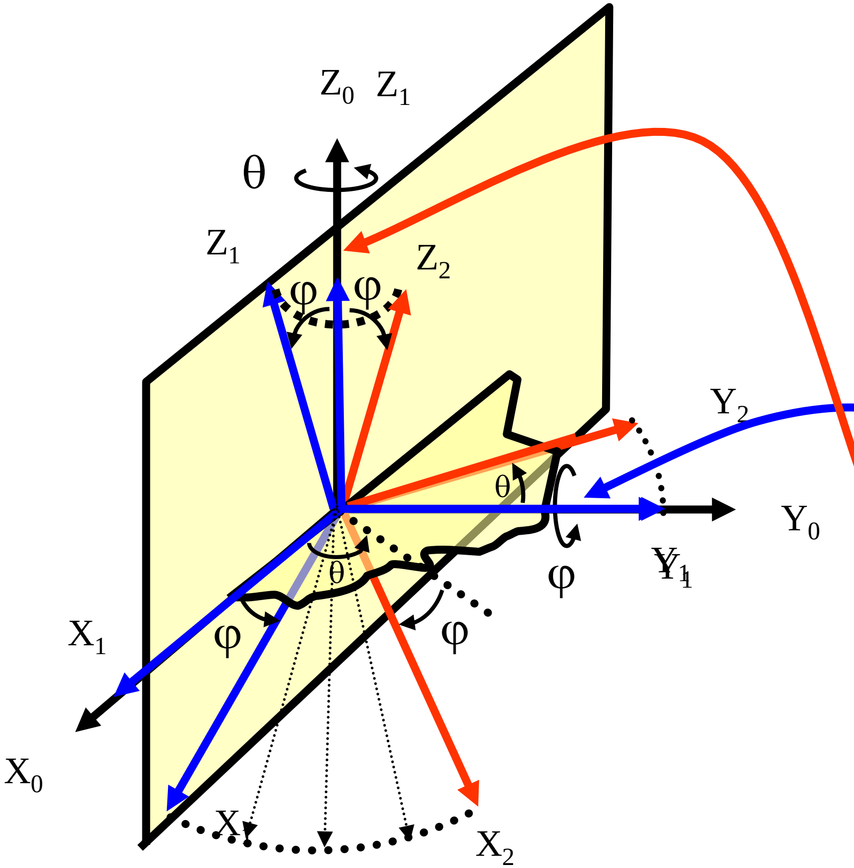
***Como operaciones sobre el SC actual o móvil …***



$$= \qquad \boldsymbol{R_0^2} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{Z},90} * \boldsymbol{R}_{\mathrm{Y},90}$$

# Composición de Matrices de Rotación...

***Ejemplo… Rotaciones sobre el sistema base***




$$R_0^2 = R_0^1 * R_1^2$$

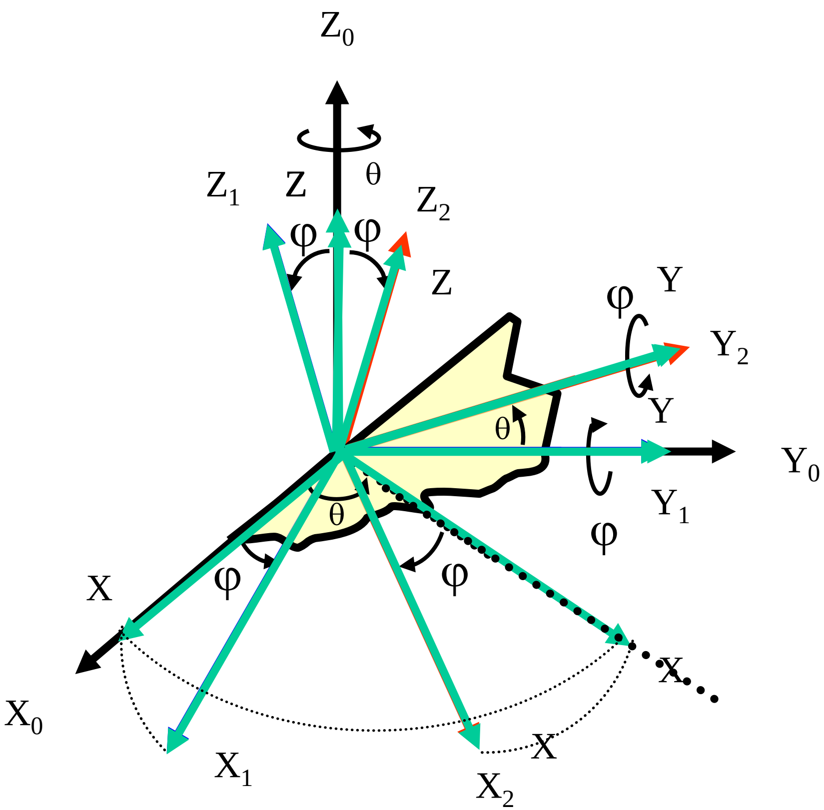
$$R_0^1 = R_{Y,\varphi}$$

$$R_1^2 = ?? \neq R_{Y,90}$$

***"debemos determinar $R_1^2$"***

# Composición de Matrices de Rotación...

***Usemos rotaciones elementales***




$$R_0^2 = R_0^1 * R_1^2$$

$$R_1^2 = R_{Y,-\varphi} * R_{Z,\theta} * R_{Y,\varphi}$$

$$R_0^2 = R_{Y,\varphi} * R_{Y,-\varphi} * R_{Z,\theta} * R_{Y,\varphi}$$

***Ley de Composición de Rotaciones Elementales***

*Rotaciones Sistema Móvil*

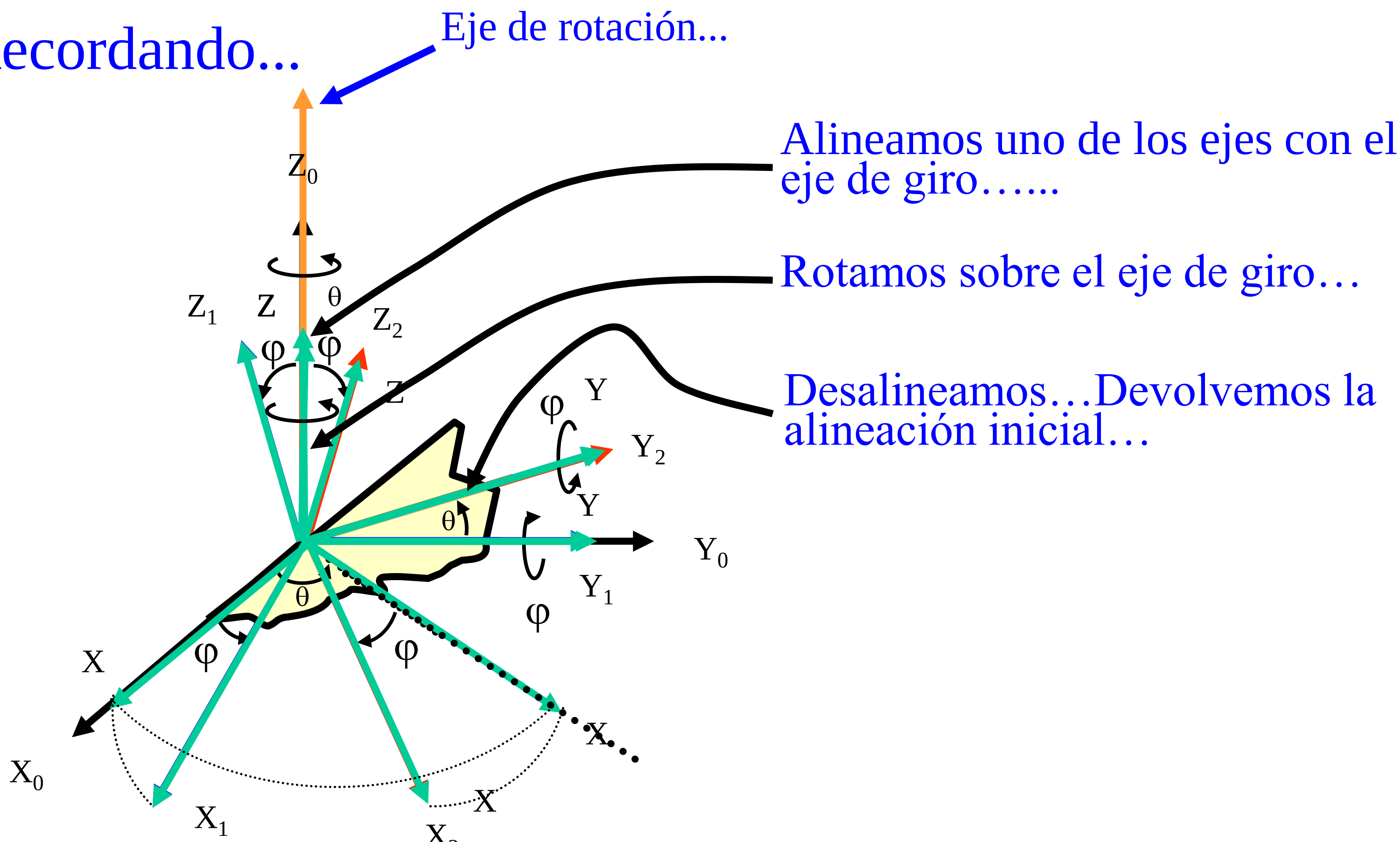
$$R_0^n = R_1 * R_2 * \ldots * R_n$$

$$R_0^n = R_n * \ldots R_2 * R_1$$

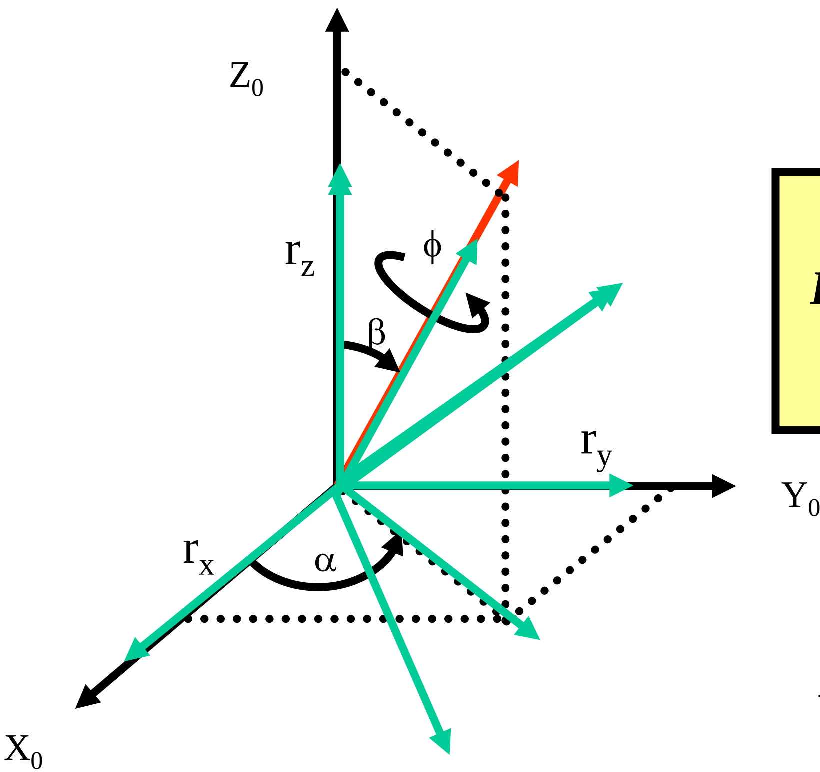
*Rotaciones Sistema Base*

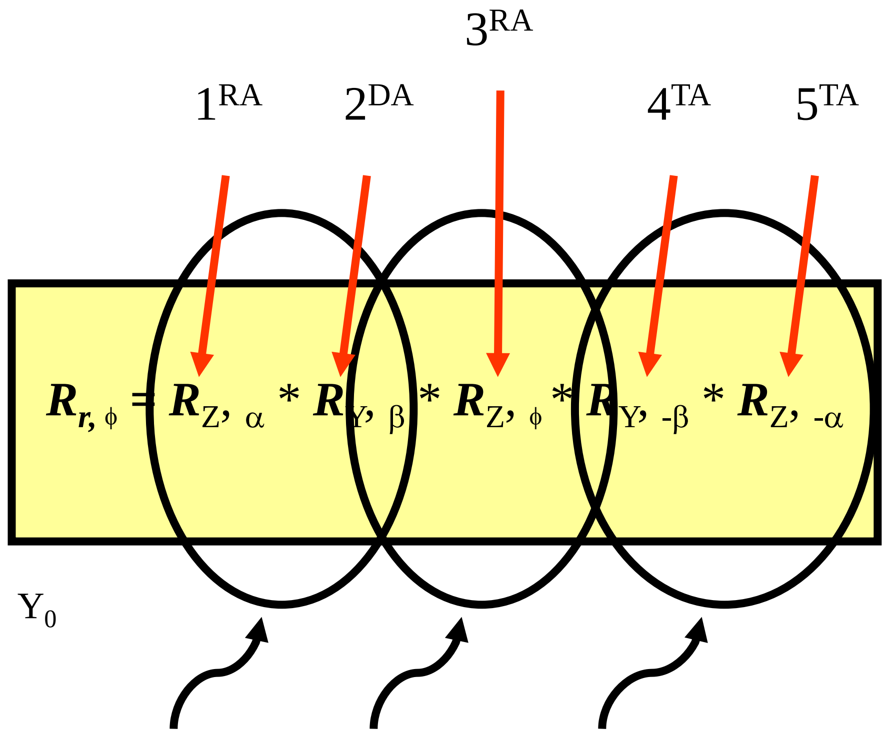
# Rotación alrededor de un eje arbitrario...

## Recordando...



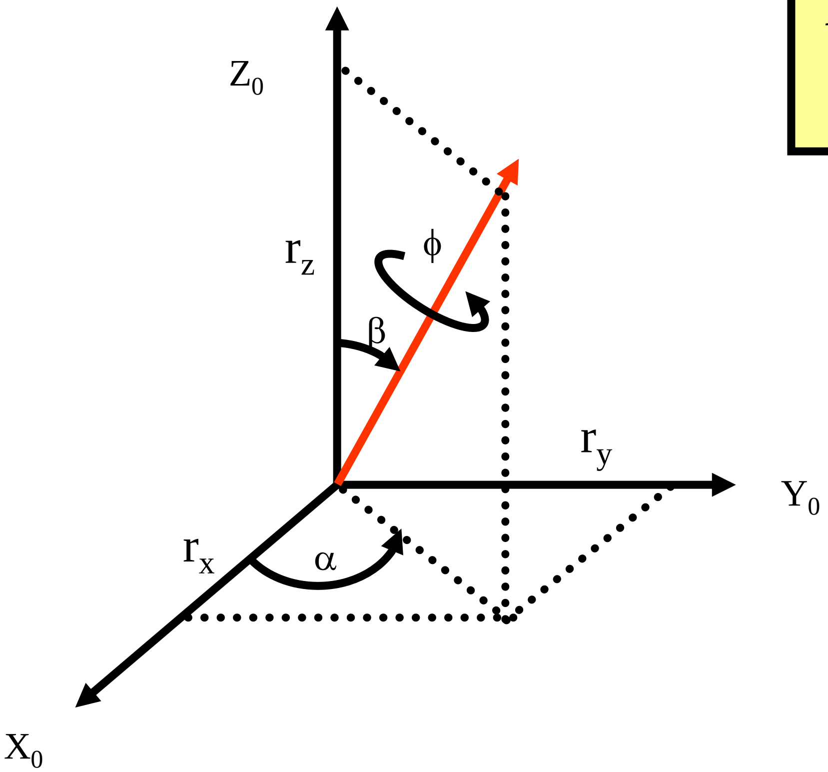
# Rotación alrededor de un eje arbitrario...




Alinear Giro nos devol_
vemos

# Rotación alrededor de un eje arbitrario...




$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{r},\,\phi} = \boldsymbol{R}_{Z,\,\alpha} * \boldsymbol{R}_{Y,\,\beta} * \boldsymbol{R}_{Z,\,\phi} * \boldsymbol{R}_{Y,\,-\beta} * \boldsymbol{R}_{Z,\,-\alpha}$$

Son matrices elementales de rotación...

$$sen(\alpha) = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}$$

$$sen(\beta) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \qquad \cos(\beta) = r_z$$

# Rotación alrededor de un eje arbitrario...

$$R_{r,\theta} = \begin{bmatrix} r_x^2 A + \cos\theta & r_x \cdot r_y \cdot A - r_z \cdot sen\theta & r_x \cdot r_z \cdot A + r_y \cdot sen\theta \\ r_x \cdot r_y \cdot A + r_z \cdot sen\theta & r_y^2 A + \cos\theta & r_y \cdot r_z \cdot A - r_x \cdot sen\theta \\ r_x \cdot r_z \cdot A - r_y \cdot sen\theta & r_y \cdot r_z \cdot A + r_x \cdot sen\theta & r_z^2 A + \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$donde \ldots A = (1 - \cos\theta)$$

## Toda matriz tiene un "eje-ángulo" equivalente

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)A + 3\cos\theta$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = A + 3\cos\theta = 1 - \cos\theta + 3\cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$$r_{32} - r_{23} = r_y r_z A + r_x sen\theta - (r_y r_z A - r_x sen\theta)$$

$$r_{32} - r_{23} = 2 r_x sen\theta$$

$$\hat{r} = \frac{1}{2sen(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

# Rotación alrededor de un eje arbitrario...

## Ejemplo…

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

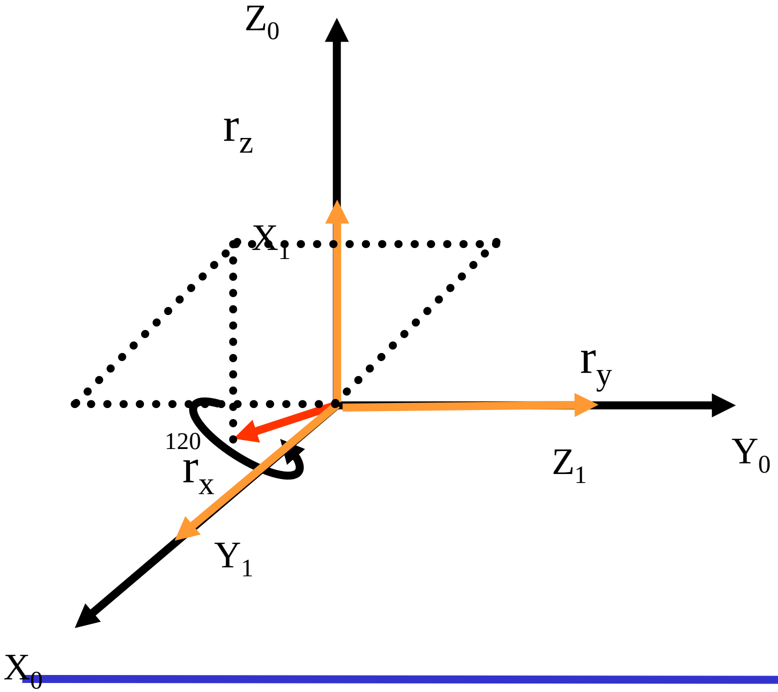
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0+0+0-1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \pm 120^{0}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2sen(\theta)}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

$$\theta = 120$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2sen(120)}\begin{bmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = 0{,}577\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



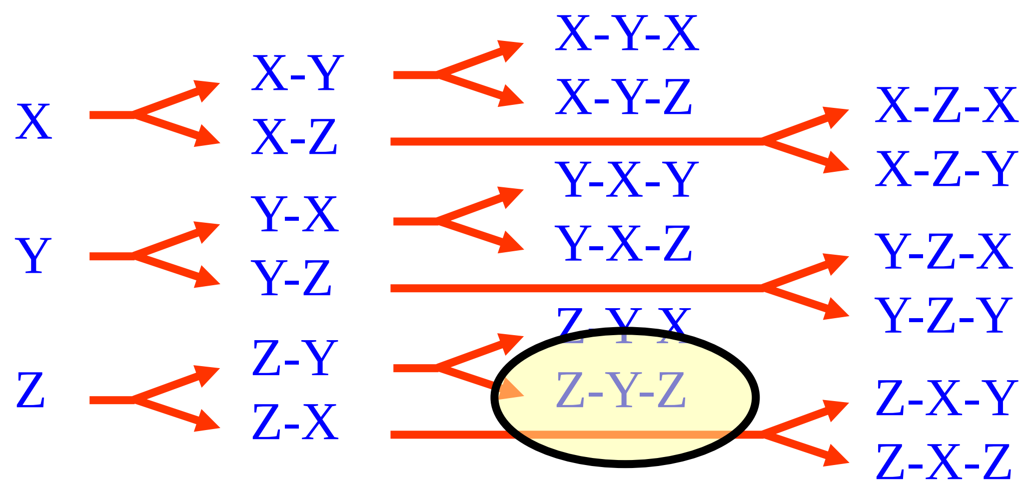
# Representación mínima de la orientación…

"La matriz de rotación da una descripción redundante"

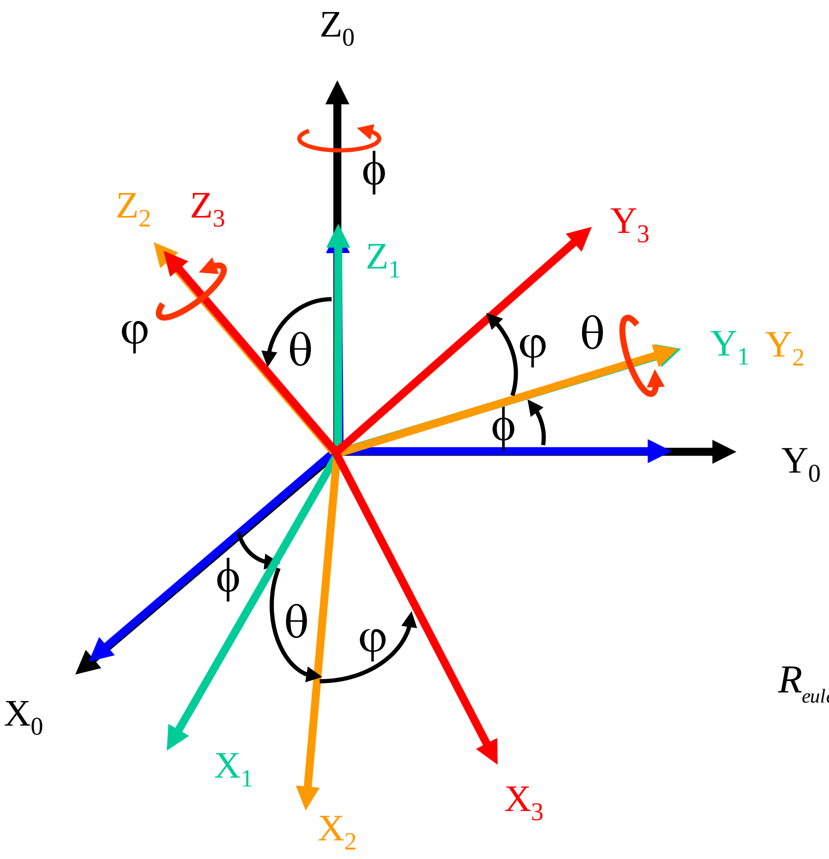
Requerimos sólo de tres parámetros independientes…

## Angulos de Euler

Se generan a partír de 3 rotaciones elementales



# Angulos de Euler




$$\boldsymbol{R_0^{1}} = \boldsymbol{R}_{Z,\Phi}$$

$$\boldsymbol{R_1^{2}} = \boldsymbol{R}_{Y,\,\theta} \qquad \boldsymbol{R_0^{2}} = \boldsymbol{R}_{Z,\Phi}\,\boldsymbol{R}_{Y,\,\theta}$$

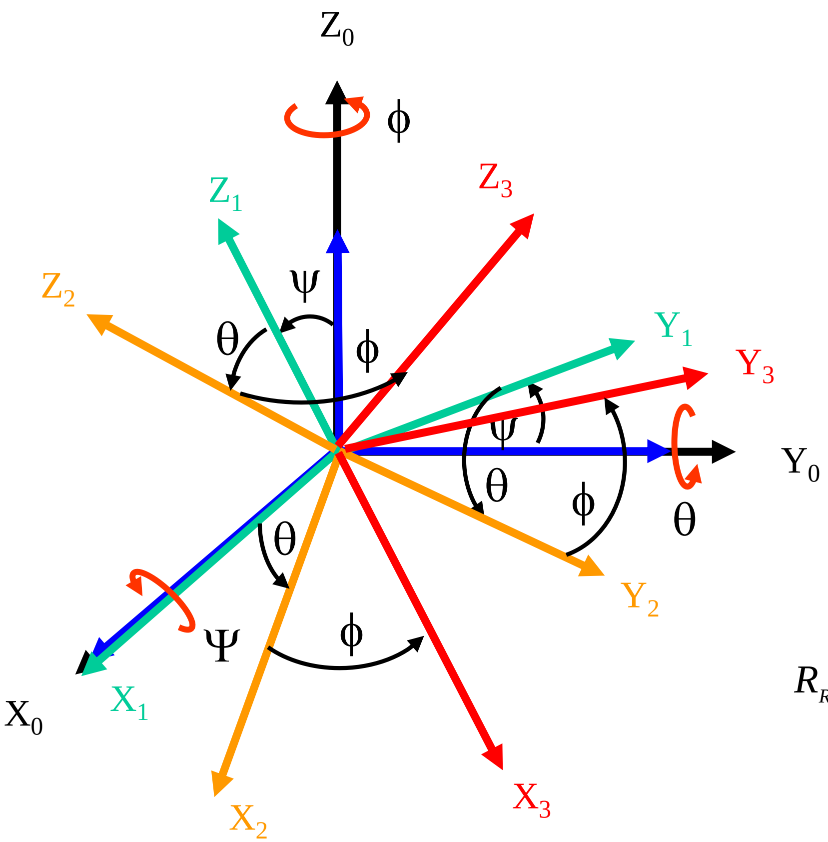
$$\boldsymbol{R_2^{3}} = \boldsymbol{R}_{Z,\Psi}$$

$$\boldsymbol{R_0^{3}} = \boldsymbol{R}_{Z,\Phi}\,\boldsymbol{R}_{Y,\,\theta}\,\boldsymbol{R}_{Z,\Psi} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{euler}}$$

$$R_{euler} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

# Angulos de Roll, Pitch y Yaw

Se generan a partír de 3 rotaciones elementales sobre el sistema base…




$$R_0^1 = R_{X,\Psi}$$

$$R_0^2 = R_{Y,\theta}\, R_{X,\Psi}$$

$$R_0^3 = R_{Z,\Phi}\, R_{Y,\theta}\, R_{X,\Psi}$$

$$R_{RPY} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$$